

Applications - Chapitre 12

Cinématique et dynamique du solide indéformable



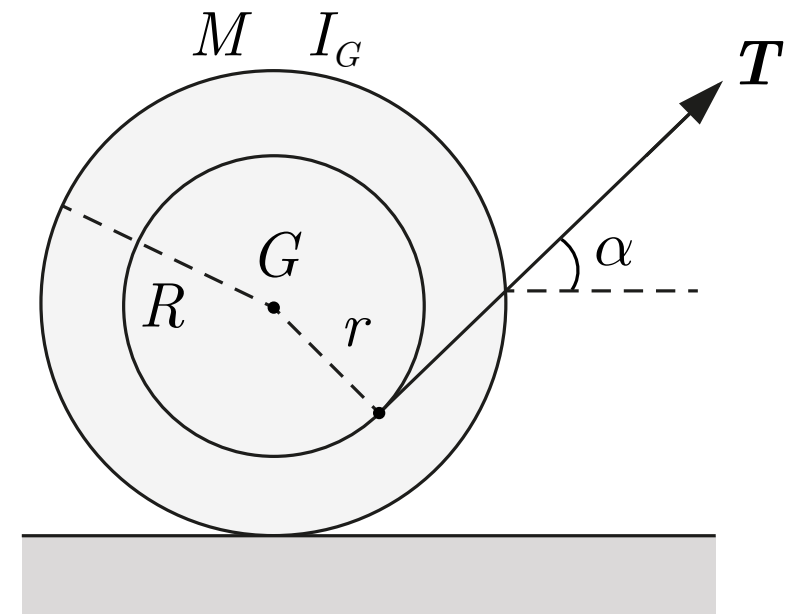
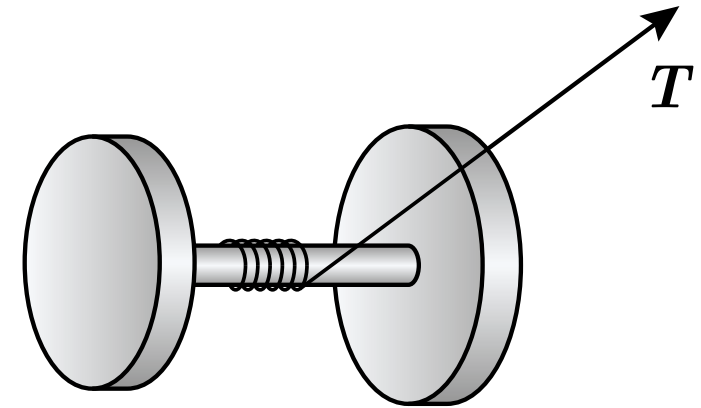
A.12.1 Haltère tirée par un fil

A.12.2 Yoyo

A.12.1 Haltère tirée par un fil

A.12.2 Yoyo

- Une haltère de masse M est formée d'une poignée de rayon r et de deux disques de rayon R . Elle est tirée par une force de traction $\mathbf{T} = \text{cste}$ le long d'un fil de masse négligeable qui fait un angle α avec l'axe horizontal.
- L'haltère roule sans glisser sur un plan horizontal. Le fil ne glisse pas sur la poignée.
- Le moment d'inertie de l'haltère par rapport à son axe de symétrie horizontal passant par le centre de masse G est I_G .



- Forces extérieures :

- 1 Poids : en G

$$\mathbf{P} = M \mathbf{g} = M g \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.12.1})$$

- 2 Force de réaction normale : en C

$$\mathbf{N} = - N \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.12.2})$$

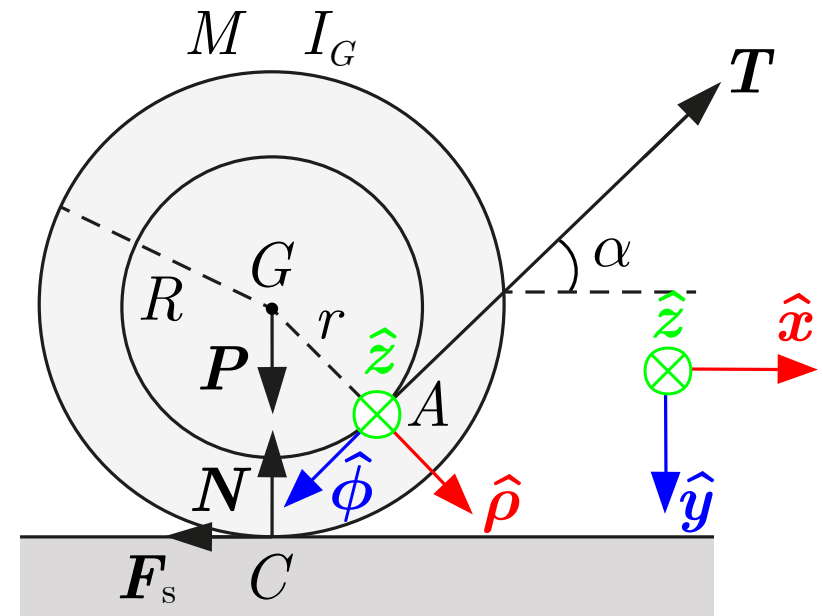
- 3 Traction : en A

$$\mathbf{T} = -T \hat{\phi} = T \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - T \sin \alpha \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.12.3})$$

- 4 Force de frottement statique : en C

$$\mathbf{F}_s = - F_s \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.12.4})$$

On ne connaît à priori pas le signe de F_s . Il est déterminé par les lois de la dynamique du solide indéformable.



- Accélération du centre de masse :

$$\mathbf{A}_G = \ddot{X}_G \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{A.12.5})$$

- Accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.12.6})$$

- Théorème du centre de masse :

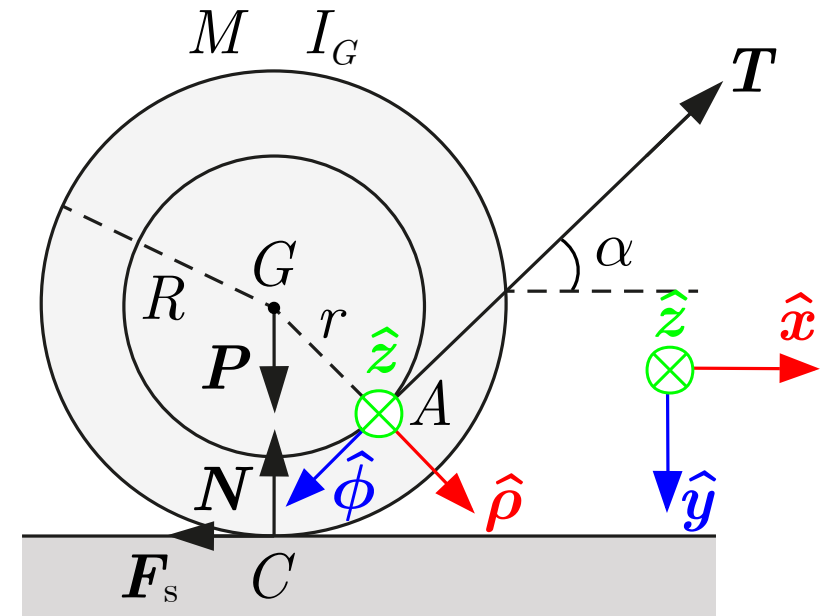
$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_s = M \mathbf{A}_G$$

$$\text{selon } \hat{\mathbf{x}} : T \cos \alpha - F_s = M \ddot{X}_G \quad (\text{A.12.7})$$

$$\text{selon } \hat{\mathbf{y}} : Mg - N - T \sin \alpha = 0 \quad (\text{A.12.8})$$

- Théorème du moment cinétique : $\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega}$ où $I_G = \text{cste}$

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{GG} \times \mathbf{P}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{GC} \times \mathbf{N}}_{=0} + \mathbf{GA} \times \mathbf{T} + \mathbf{GC} \times \mathbf{F}_s = I_G \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{L}}_G$$

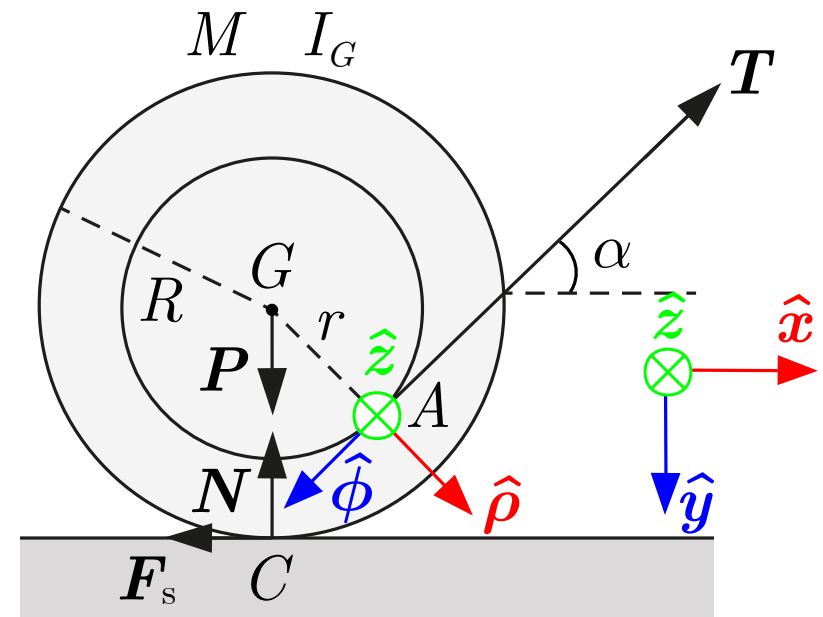


- Théorème du moment cinétique :

$$\mathbf{GA} \times \mathbf{T} + \mathbf{GC} \times \mathbf{F}_s = I_G \dot{\boldsymbol{\Omega}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (r \hat{\boldsymbol{\rho}}) \times (-T \hat{\boldsymbol{\phi}}) + (R \hat{\mathbf{y}}) \times (-F_s \hat{\mathbf{x}}) \\ = I_G \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{A.12.9})$$

selon $\hat{\mathbf{z}}$: $-r T + R F_s = I_G \ddot{\phi}$



- Liaison : roulement sans glissement

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_C = \mathbf{0} \quad (\text{A.12.10})$$

- Dérivée temporelle :

$$\mathbf{A}_G = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{CG} \quad \text{où} \quad \mathbf{CG} = \text{cste} \quad (\text{A.12.11})$$

$$\Rightarrow \ddot{X}_G \hat{\mathbf{x}} = (\ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}}) \times (-R \hat{\mathbf{y}})$$

selon $\hat{\mathbf{x}}$: $\ddot{X}_G = R \ddot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = \frac{\ddot{X}_G}{R} \quad (\text{A.12.12})$

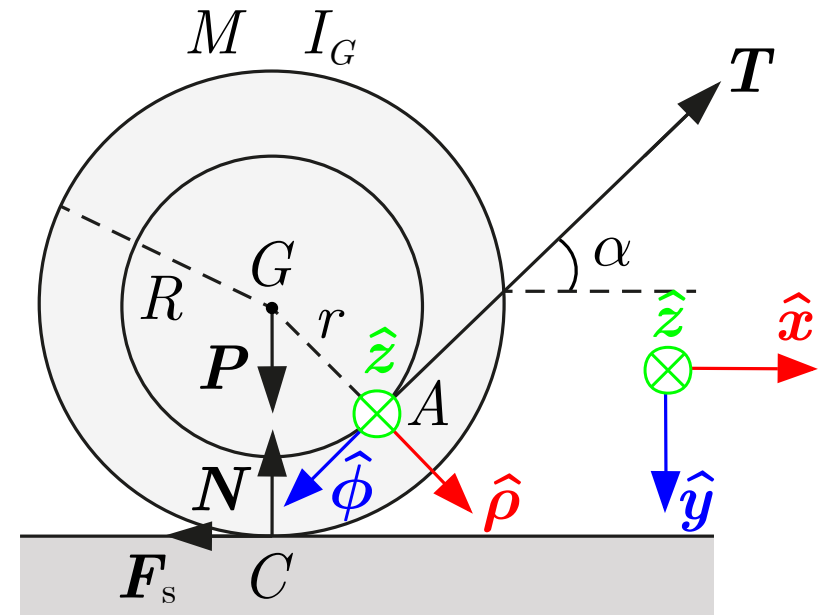
- Equations du mouvement :

$$T \cos \alpha - F_s = M \ddot{X}_G \quad (A.12.7)$$

$$-r T + R F_s = \frac{I_G}{R} \ddot{X}_G \quad (A.12.9)$$

- $R \cdot (A.12.7) + (A.12.9) :$ (A.12.13)

$$(R \cos \alpha - r) T = \frac{I_G + M R^2}{R} \ddot{X}_G$$



$$\Rightarrow \ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{M R^2}} \frac{T}{M} \quad \text{où} \quad T > 0 \quad (A.12.13)$$

- Accélération du centre de masse :

$$\ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} \frac{T}{M} \quad (\text{A.12.13})$$

1 Si $\cos \alpha > \frac{r}{R} \Rightarrow \ddot{X}_G > 0$

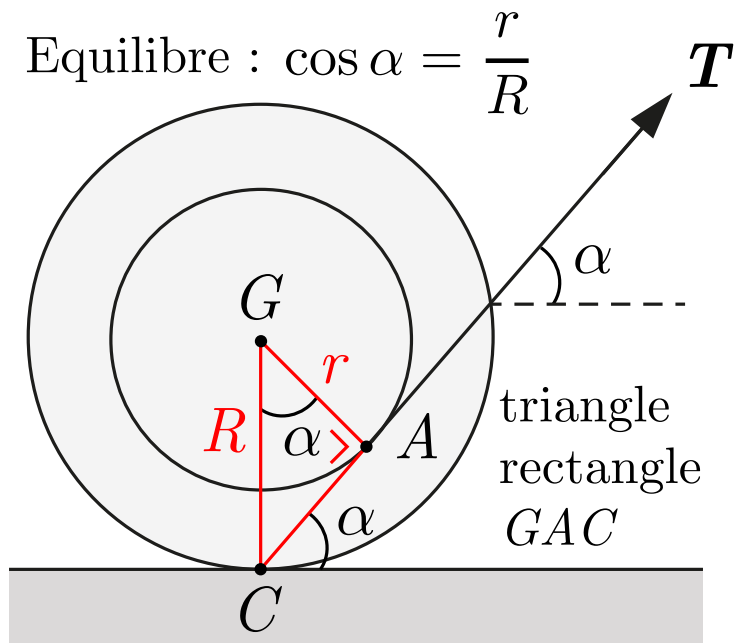
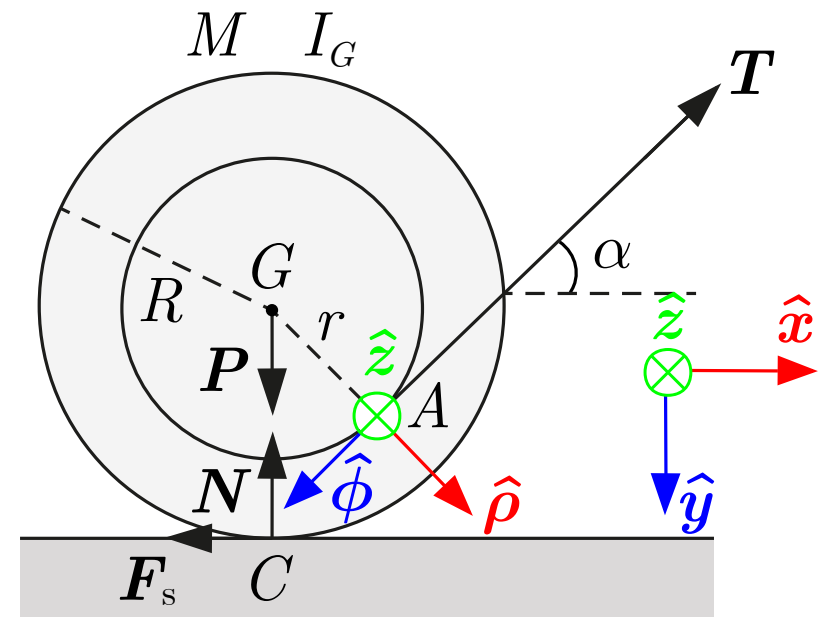
$\alpha < \arccos\left(\frac{r}{R}\right) \rightarrow$ droite

2 Si $\cos \alpha < \frac{r}{R} \Rightarrow \ddot{X}_G < 0$

$\alpha > \arccos\left(\frac{r}{R}\right) \rightarrow$ gauche

3 Si $\cos \alpha = \frac{r}{R} \Rightarrow \ddot{X}_G = 0$

$\alpha = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$ équilibre

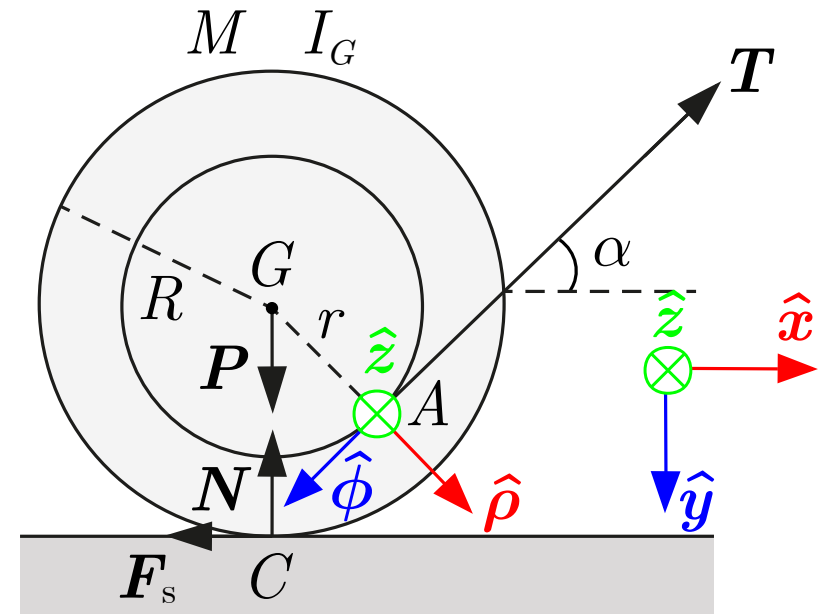


- Force de frottement statique :

$$F_s = T \cos \alpha - M \ddot{X}_G \quad (\text{A.12.7})$$

- Accélération du centre de masse :

$$\ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} \frac{T}{M} \quad (\text{A.12.13})$$



- Force de frottement statique :

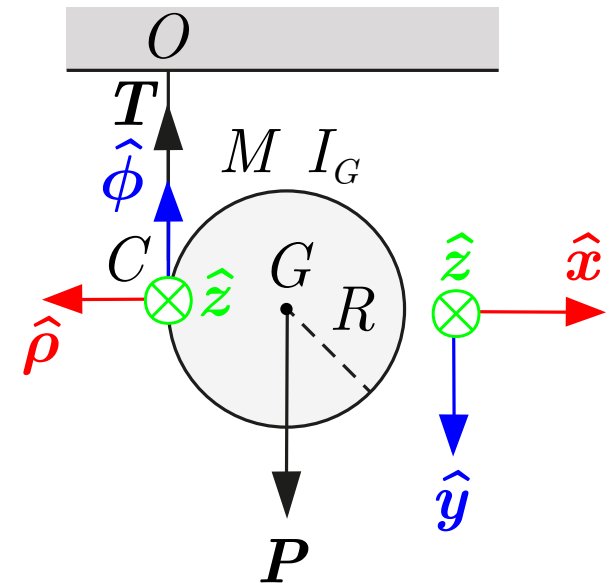
$$F_s = \frac{\frac{I_G}{MR^2} \cos \alpha + \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} T > 0 \quad (\text{A.12.14})$$

- La force de frottement F_s est orientée vers la gauche pour un angle $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

A.12.1 Haltère tirée par un fil

A.12.2 Yoyo

- Un yoyo est constitué d'un cylindre de masse M et de rayon R sur la surface duquel est fixé un fil de masse négligeable attaché au plafond au point O .
- Le yoyo roule sans glisser dans un plan vertical. Le fil ne glisse pas sur le yoyo.
- Le moment d'inertie du yoyo par rapport à son axe de symétrie horizontal passant par le centre de masse G est I_G .
- Forces extérieures :



- 1 Poids : en G

$$\mathbf{P} = M \mathbf{g} = M g \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.12.15})$$

- 2 Tension : en C

$$\mathbf{T} = -T \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.12.16})$$

- Accélération du centre de masse :

$$\mathbf{A}_G = \ddot{Y}_G \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.12.17})$$

- Accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.12.18})$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = M \mathbf{A}_G \quad (\text{A.12.19})$$

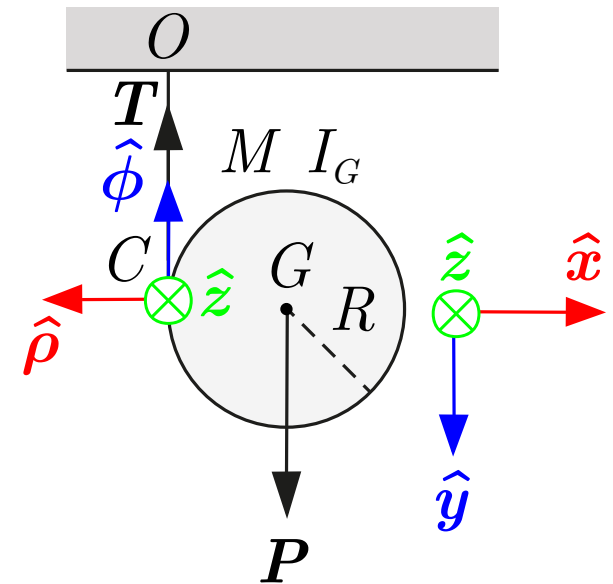
selon $\hat{\mathbf{y}}$: $Mg - T = M \ddot{Y}_G$ (A.12.20)

- Théorème du moment cinétique : $\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega}$ où $I_G = \text{cste}$

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{GG} \times \mathbf{P}}_{=0} + \mathbf{GC} \times \mathbf{T} = I_G \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{L}}_G$$

$$\Rightarrow (-R \hat{\mathbf{x}}) \times (-T \hat{\mathbf{y}}) = I_G \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$$

selon $\hat{\mathbf{z}}$: $RT = I_G \ddot{\phi}$ (A.12.21)



- Liaison : roulement sans glissement

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_C = \mathbf{0} \quad (\text{A.12.22})$$

- Dérivée temporelle :

$$\mathbf{A}_G = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{CG} \quad \text{où} \quad \mathbf{CG} = \text{cste} \quad (\text{A.12.23})$$

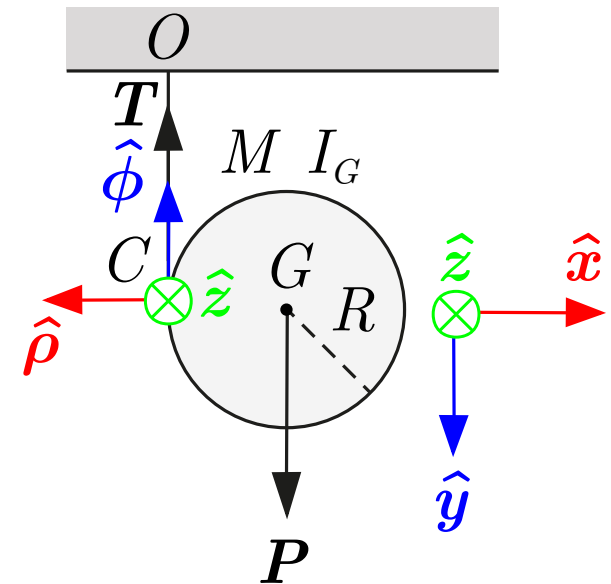
$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{Y}}_G \hat{\mathbf{y}} = (\ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}}) \times (R \hat{\mathbf{x}})$$

$$\text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \ddot{\mathbf{Y}}_G = R \ddot{\phi} \quad (\text{A.12.24})$$

- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M \ddot{\mathbf{Y}}_G \quad (\text{A.12.20})$$

$$R^2 T = I_G \ddot{\mathbf{Y}}_G \quad (\text{A.12.25})$$



- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M \ddot{Y}_G \quad (A.12.20)$$

$$R^2 T = I_G \ddot{Y}_G \quad (A.12.25)$$

- $R^2 \cdot (A.12.20) + (A.12.25) :$

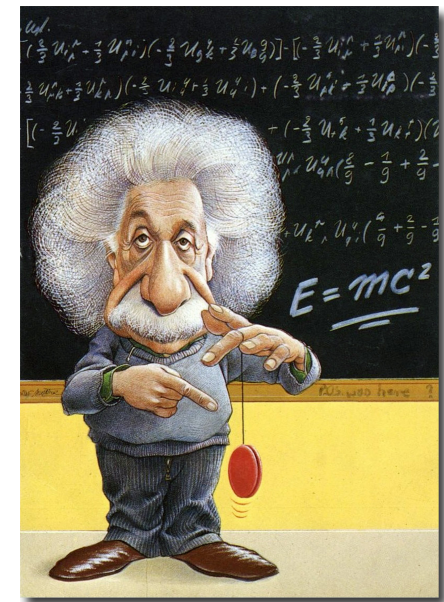
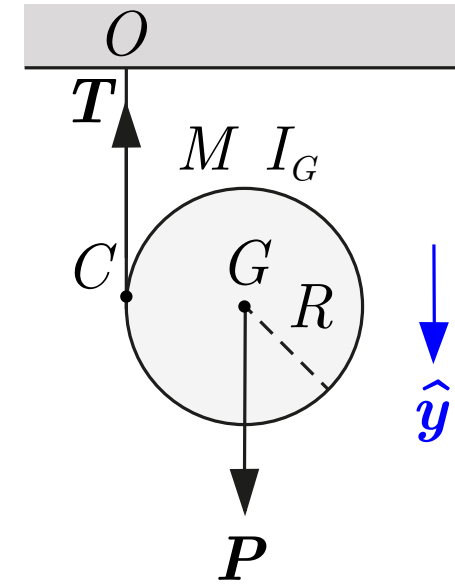
$$MR^2 g = (I_G + MR^2) \ddot{Y}_G \quad (A.12.26)$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_G = \frac{MR^2}{I_G + MR^2} g \quad (A.12.27)$$

- $I_G \cdot (A.12.20) = M \cdot (A.12.25) :$

$$I_G Mg - I_G T = MR^2 T \quad (A.12.28)$$

$$\Rightarrow T = \frac{I_G}{I_G + MR^2} Mg \quad (A.12.29)$$



- Cylindre plein : $I_G = \frac{1}{2} MR^2$

$$\ddot{Y}_G = \frac{2}{3} g \quad (A.12.30)$$

$$T = \frac{1}{3} Mg \quad (A.12.31)$$

- Cylindre creux : $I_G = MR^2$

$$\ddot{Y}_G = \frac{1}{2} g \quad (A.12.32)$$

$$T = \frac{1}{2} Mg \quad (A.12.33)$$

- Yoyo réel : $\frac{1}{2} MR^2 < I_G < MR^2$

